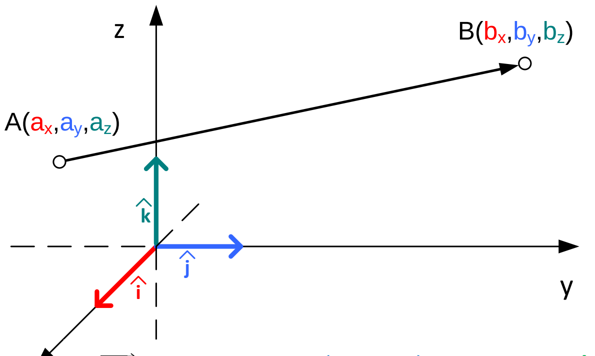
MMF1

Petar Stipanović: Kratki pregled formula

VEKTORI[1]

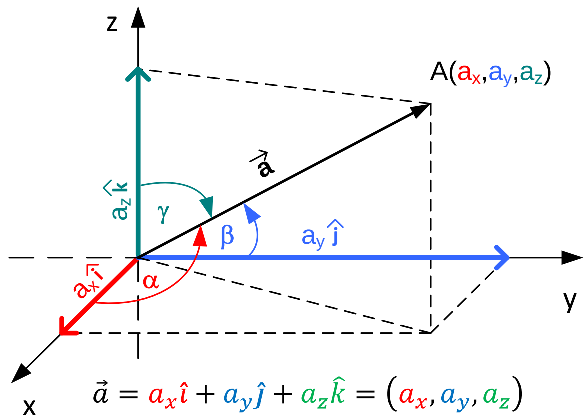
$\vec{V}_{ektor}$ je jednoznačno određen modulom, smjerom i orijentacijom. Vektor od točke A do B označavamo $\overrightarrow{AB}$. **Modul** vektora $\overrightarrow{AB}$ (oznaka: $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$) jest duljina dužine $\overline{AB}$. **Smjer** od $\overrightarrow{AB}$ određen je smjerom pravca kroz A i B. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, koji leže na istom pravcu p, imaju isu **orijentaciju** ako B i C leže na p s iste strane točke A, a suprotnu orjentaciju ako B i C leže na p s različitih strana točke A. **Suprotni vektori** su vektori jednakih modula i smjerova, a suprotnih orijentacija ($\vec{A}$ i $\vec{B} = -\vec{A}$). **Nulvektor** $\vec{0}$ je vektor čiji je modul 0. **Radijvektor** točke A jest usmjerena dužina iz ishodišta do točke A (oznaka: $\overrightarrow{0A} \equiv \vec{A}$). Vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ **jednaki su** ($\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$) ako i samo ako su njihovi moduli (iznosi), smjerovi i orijentacije jednaki; odnosno jednake njihove komponente. **Linearna kombinacija vektora** jest vektor $\alpha \cdot \vec{A} + \beta \cdot \vec{B}$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **Kolinearni vektori** jesu vektori koji imaju isti smjer ($\vec{A}$ i $\vec{B}$ su kolinearni ako $\exists! \, \alpha \in \mathbb{R}$ za koji je $\vec{B} = \alpha \cdot \vec{A}$). **Komplanarni vektori** su vektori koji su paralelni s istom ravninom (nekolinearni vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ te vektor $\vec{C}$ komplanarni su ako $\exists! \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za koje je $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$).

Vektor od točke A do točke B



$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\hat{\imath} + (b_y - a_y)\hat{\jmath} + (b_z - a_z)\hat{k}$$

Radijus vektor točke A rastavljen na komponente



$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

Duljina (iznos) vektora

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Množenje vektora skalarom (realnim brojem)

$$\alpha \cdot \vec{A} = \alpha A_x\hat{\imath} + \alpha A_y\hat{\jmath} + \alpha A_z\hat{k} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) = \vec{A} \cdot \alpha$$

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{\boldsymbol{A}}$ (skalarne komponente od $\hat{\boldsymbol{A}}$ jednake su kosinusima smjerova)

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{|\vec{A}|} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Zbrajanje vektora

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

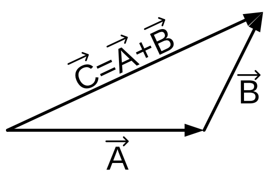
komutativnost: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

asocijativnost: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

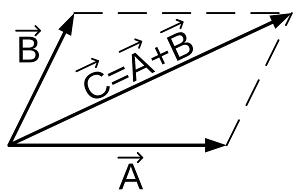
distributivnost: $\alpha \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \alpha \cdot \vec{A} + \alpha \cdot \vec{B}$

$(\alpha + \beta) \cdot \vec{A} = \alpha \cdot \vec{A} + \beta \cdot \vec{A}$

Pravilo trokuta



Pravilo paralelograma



[1] Vektor je element vektorskog prostora. Pod pojmom vektor, ovdje ćemo podrazumijevati samo elemente trodimenzionalanog Euklidskog prostora, odnosno usmjerene (orijentirane) dužine.

VEKTORI[1]

Skalarni umnožak

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{A},\vec{B})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\sphericalangle(\vec{A},\vec{B}) \in [0,\pi]$

Vektorski umnožak

$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{A},\vec{B})$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$\sphericalangle(\vec{A},\vec{B}) \in [0,\pi]$

$\vec{A}\times\vec{B} \perp (\vec{A}\wedge\vec{B})$

Mješoviti umnožak

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

Trostruki vektorski umnožak

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{C}\cdot\vec{A})\cdot\vec{B}$

Pravilo desne ruke za vektroski umnožak: Prsti desne ruke idu od vektora $\vec{A}$ prema vektoru $\vec{B}$ za manji kut, a palac pokazuje vektor $\vec{A}\times\vec{B}$.

Jedinični vektori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

$\hat{\imath} = (1,0,0)$

$\hat{\jmath} = (0,1,0)$

$\hat{k} = (0,0,1)$

$\hat{\imath} \perp \hat{\jmath} \perp \hat{k}$

$|\hat{\imath}| = 1$

$|\hat{\jmath}| = 1$

$|\hat{k}| = 1$

Vektorski umnožak $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

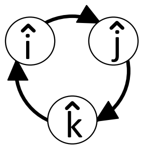
$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \vec{0}$

$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \vec{k}$

$\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\vec{k}$

$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$

$\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$



Primjene umnožaka vektora

Volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{A},\vec{B}\ i\ \vec{C}$ iznosi $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})$

Za komplanarne vektore $\vec{A},\vec{B}\ i\ \vec{C}$ vrijedi: $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}}) = \mathbf{0}$

Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{A}\ i\ \vec{B}$iznosi $|\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}|$

Za kolinearne vektore $\vec{A}\ i\ \vec{B}$ vrijedi: $|\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}| = \mathbf{0}$

$(\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\mathbf{0}}) \vee (\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\mathbf{0}}) \vee (\vec{\boldsymbol{A}} \perp \vec{\boldsymbol{B}}) \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0}$

DERIVACIJE

Funkcija $f: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ derivabilna je (također i neprekidna) u točki $x_0 \in \mathfrak{D}$ (u) ako postoji limes

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \equiv f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Jednadžba normale na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Tablica derivacija[2]

$\boldsymbol{f(x)}$	c	x	x^n	x^c
$\boldsymbol{f'(x)}$	0	1	nx^{n-1}	cx^{c-1}
$\boldsymbol{f(x)}$	a^x	e^x	$\log_a x$	$\ln x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$a^x\ln a$	e^x	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{1}{x}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{cth} x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\operatorname{arsh} x$	$\operatorname{arch} x$	$\operatorname{arth} x$	$\operatorname{arcth} x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{1-x^2}$

[2] $n \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 0$; x^c definirano za $x > 0$; $\log_a x$ definirano samo za $x > 0$; $\arcsin x$ i $\arccos x$ definirano za $|x| < 1$; cth x definirano za x≠0; arch x definirano za x>1; arth x definirano samo za $|x| < 1$; arcth x definirano samo za $|x| > 1$.

DERIVACIJE

Pravila deriviranja

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(f(g(x))\right)' =$ $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

PARCIJALNE DERIVACIJE

Parcijalna derivacija funkcije $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ po argumentu x_i, $i \in [1, n]$ definira se sa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)}{\Delta x_i} = f'_{x_i}$$

Deriviramo je kao funkciju jedne varijable (x_i) držeći sve ostale varijable konstantama. Ako za funkciju f u točki T postoje sve parcijalne derivacije onda je f derivabilna u točki T.

Parcijanu derivaciju prve parcijalne derivacije funkcije $f = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$ nazivamo **parcijalna derivacija drugog reda**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = f''_{x_j x_i}$$

Ako parcijalne derivacije postoje i ako su neprekidne onda rezultat višestrukog deriviranja ne ovisi o poretku deriviranja. Specijalo za $f = f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ **Schwartzov teorem** za $f = f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ glasi

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}}$$

Deriviranje složenih funkcija

$f = f(x, y)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$ $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} \cdot \frac{dy}{dt}$	$f = f(x, y, z)$; $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$ $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{u}} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} \cdot \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{u}} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} \cdot \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{u}}$

Deriviranje vektora

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

Totalni prirast derivabilne funkcije $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$$

Totalni (potpuni) diferencijal diferencijabilne funkcije $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m$$

Totalni diferencijal višeg reda funkcije $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Općenito, kada postoje neprekidne odgovarajuće derivacije, vrijedi simbolička fomula za diferencijal višeg reda

$$d^n f(x, y) = \left(\mathrm{dx}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{dy}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)^{\mathrm{n}} f(x, y)$$

EKSTREMI

Ispitivanje ekstrema funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u točki $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. U stupcu desno je prvi, a u stupcu desno drugi način. Ako prvim načinom nema odluke, ispitujemo drugim.

NUŽNI UVJETI

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0} = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, n)$	$(df(x_1, x_2, \dots, x_n))_{x_0} = 0$

Rješavanjem prethodnog sustava dobijemo stacionarne točke x_{0j} u kojima f može (ali ne mora) imati ekstrem. Stacionarne točke i točke u kojima ne postoji df kandidati su za ekstreme.

DOVOLJNI UVJETI

Odredimo determinante:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad ; \quad 1 \le r \le n \quad ;$$

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{x_0}$$

Funkcija f u točki x_0:

- ima MINIMUM, ako je $(\Delta_r > 0)\ (\forall r)$
- ima MAKSIMUM, ako je
  $\begin{cases} (\Delta_r > 0)(\forall r = 2k) \\ (\Delta_r < 0)\ (\forall r = 2k-1) \end{cases}$
- NEMA EKSTREMA, ako je $(\Delta_r \neq 0)\ \wedge (1) \wedge (2)$
- NEMA ODLUKE, ako je $(\exists \Delta_r = 0)$

Ako u dovoljno maloj okolini točke x_0 za $(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \cdots + (dx_n)^2 > 0$ vrijedi:

- $d^2 f(x_0) > 0$, f ima MINIMUM u točki x_0
- $d^2 f(x_0) < 0$, f ima MAKSIMUM u točki x_0
- $d^2 f(x_0)$ mijenja predznak, f NEMA EKSTREMA u točki x_0
- $d^2 f(x_0) = 0$ za neku kombinaciju diferencijala, o ekstremima funkcije f NEMA ODLUKE (pa moramo računati totalni prirast funkcije).

UVJETNI EKSTREMI

Pronalaženje ekstrema funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ uz uvjete (argumenti su povezani jednadžbama (za $i = 1, \dots, m$))

$$\boldsymbol{\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0}$$

svodi se na uobičajeno traženje ekstrema nove funkcije

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

NUŽNI UVJETI

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, n)} \qquad\qquad \boldsymbol{\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, m)}$$

Ako je $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0n})$ jedno rješenje ovog sustava tada f može imati ekstrem $f(x_{01}, \dots, x_{0n})$ u točki $T(x_{01}, \dots, x_{0n})$.

DOVOLJNI UVJETI

Pomoću predznaka drugog diferencijala Lagrangeove funkcije ispitujemo postojanje i tip uvjetnog ekstrema

$$d^2 F(x_1, \dots, x_n) = \left(\mathrm{dx}_1 \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} + \cdots + \mathrm{dx}_\mathrm{n} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}}\right)^2 F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a za prethodno dobivene stacionarne točke i točke u kojima nisu definirane prve parcijalne derivacije. Veze diferencijala argumenata $dx_1, \dots, dx_n$ dobijemo diferenciranjem uvjeta

$$d\varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \mathrm{dx}_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \mathrm{dx}_\mathrm{n} = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, m)$$

Izračunamo m diferencijala dx_i kao funkcije preostalih n-m diferencijala $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ te ih uvrstimo u d^2F za $T(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0n})$

Ako je:

- $d^2 F(\mathrm{T}) > 0$, f ima MINIMUM u točki T
- $d^2 F(\mathrm{T}) < 0$, f ima MAKSIMUM u točki T
- $d^2 F(\mathrm{T})$ mijenja predznak, f NEMA EKSTREMA u točki T
- $d^2 F(\mathrm{T}) = 0$, o ekstremima funkcije f NEMA ODLUKE u točki T

GRADIJENT

Gradijent (skalarnog polja) [vektor]	Nabla operator	Derivacija u smjeru vektora $\vec{u}$
$\mathrm{grad}\Phi = \nabla\Phi = \hat{\imath}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$	$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$	$\Phi'_u = \nabla\Phi \cdot \hat{u}$

Geometrijska interpretacija	Fizikalni primjeri
$\nabla\Phi$ je vektor koji ima smjer najbrže prostorne promjene funkcije Φ, vektor okomit na ekvipotencijalne plohe.	Ako $(\text{za polje } \vec{E})$ $(\exists\nabla\Phi)(\vec{E} = -\nabla\Phi)$ Φ nazivamo njegovim potencijalom. Za konzervativne sile (sile čiji rad ne ovisi o putu već samo o početnoj i konačnoj točki) vrijedi $\vec{F} = -\nabla E_p$

DIVERGENCIJA

Divergencija (vektorskog polja) [skalar]	Izvori polja	Ponori polja
$\mathrm{div}\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\nabla\cdot\vec{V} > 0$	$\nabla\cdot\vec{V} < 0$

Jednadžba kontinuiteta

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$	Rezultantni tok različit od nule dovodi do promjene gustoće unutar volumena.

ROTACIJA

Rotacija (vektorskog polja) [vektor]

$$\mathrm{rot}\vec{V} = \nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

Rotacija centralne sile	Rotacija vektora položaja	Rotacija gradijenta
$\nabla\times(\vec{r}f(r)) = \frac{df}{dr}\hat{r}\times\vec{r} = 0$	$\nabla\times\vec{r} = 0$	$\nabla\times(\nabla\Phi) = 0$

Polja

potencijalno polje: $\mathrm{rot}\vec{V} = 0$, a $\mathrm{div}\vec{V} \neq 0$ bar u nekim točkama solenoidno polje: $\mathrm{div}\vec{V} = 0$, a $\mathrm{rot}\vec{V} \neq 0$ bar u nekim točkama Laplaceovo polje: $\mathrm{div}\vec{V} = 0$ i $\mathrm{rot}\vec{V} = 0$	Složena polja, za koja bar u nekim točkama vrijedi $\mathrm{div}\vec{V} \neq 0$ i $\mathrm{rot}\vec{V} \neq 0$, uvijek se mogu predstaviti kao superpozicija potencijalnog i solenoidnog polja

DJELOVANJE NABLA OPERATORA

Laplasijan	Divergencija rotacije	Rotacija rotacije
$\nabla\cdot(\nabla\Phi) = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V}) = 0$	$\nabla\times(\nabla\times\vec{V}) = \nabla(\nabla\vec{V}) - (\nabla\nabla)\vec{V}$

Djelovanje nabla operatora

$\nabla(\Phi+\Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi$	$\nabla(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\vec{A} + \nabla\vec{B}$	$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}$
$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi$	$\nabla(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\nabla\Phi + \Phi\nabla\vec{A}$	$\nabla\times(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\times(\nabla\Phi) + \Phi(\nabla\times\vec{A})$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\cdot\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\nabla\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\nabla)\cdot\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

NEODREĐENI INTEGRALI[3]

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

Potencije

$\int dx = \mathrm{x} + C$ | $\int \frac{dx}{x} = \ln|\mathrm{x}| + C$ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{\mathrm{n}+1} + C$ | $\int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{\mathrm{b}+1} + C$

Eksponencijalne funkcije

$\int e^x dx = e^x + C$ | $\int p^x dx = \frac{p^x}{\ln \mathrm{p}} + C$

Trigonometrijske funkcije

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$
$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$$

Hiperbolne funkcije

$$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$$
$$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$$
$$\int \mathrm{th}\, x\, dx = \ln|\mathrm{ch}\, x| + C$$
$$\int \mathrm{cth}\, x\, dx = \ln|\mathrm{sh}\, x| + C$$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{ch}\, x + C$$

Razlomljene racionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{Arcth} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \mathrm{Arccth} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Iracionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mathrm{Arsh} \frac{x}{a} + C = \ln \left| \mathrm{x} + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathrm{Arch} \frac{x}{a} + C = \ln \left| \mathrm{x} + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

Osnovna pravila integriranja

$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$ | $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Metoda supstitucije

$x = \varphi(t)$ nepredkidno derivabilna, $\varphi'(t) \neq 0$ | $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Parcijalno integriranje

$u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ neprekidno derivabilne | $\int udv = uv - \int vdu$

ODREĐENI INTEGRALI

Definicija

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{MAX(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \quad ; \quad \xi_i = a + \frac{2n+1}{2}\Delta x_i$$

Newton Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Zamjena varijabli u određenom integralu

$f(x)$ neprekidna na $[a,b]$; $x = \varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ neprekidne na $[\alpha,\beta]$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

[3] $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{a}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$; $\mathrm{b} \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

Dvostruki integral

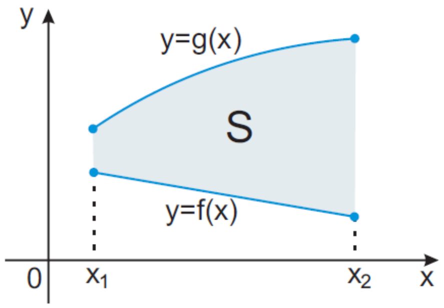
Dvostrukim integralom neprekidne funkcije $f(x,y)$ preko određenog zatvorenog područja S u ravnini xOy nazivamo limes odgovarajuće integralne sume

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{MAX(\Delta x_i)\to 0 \\ MAX(\Delta y_k)\to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i \Delta y_k$$

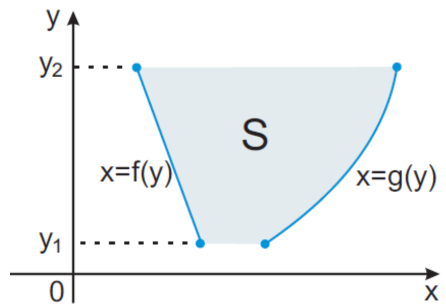
gdje je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, a suma protegnuta preko vrijednosti i i k za koje $(x_i, y_k) \in S$.

Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x_1)}^{g(x_2)} f(x,y)dy$$



$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{f(y_1)}^{g(y_2)} f(x,y)dx$$



Dvostruki integral u krivocrtnim koordinatama

$$\iint_{S_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{S_{uv}} f[x(u,v), y(u,v)] \cdot |J| \cdot dudv \quad ; \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ zadržava stalan predznak u S_{uv}

Trostruki integral

Trostrukim integralom neprekidne funkcije $f(x,y,z)$ preko određenog zatvorenog područja V u prostoru nazivamo limes odgovarajuće integralne sume

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{MAX(\Delta x_i)\to 0 \\ MAX(\Delta y_j)\to 0 \\ MAX(\Delta z_k)\to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i \Delta y_j\,\Delta z_k$$

Integriranje se svodi na tri uzastopna jednostruka integrala ili jednog dvostrukog i jednog jednostrukog.

Trostruki integral u pravokutnim koordinatama

Ako je područje integracije definirano nejednadžbama $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Trostruki integral u krivocrtnim koordinatama[4]

$$\iiint_{V_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_{uvw}} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \cdot |J| \cdot dudvdw \quad ; \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

---

[4] Uvjeti primjenjivosti pri prijelazu iz jednih varijabli u druge:

- ✓ neprekidne su funkcije veze $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ i njihove parcijalne derivacije prvog reda
- ✓ funkcije veze su uspostavljaju međusobno jednoznačno i obostrano neprekidno pridruživanje
- ✓ Jakobijan zadržava stalan predznak u području V_{uvw}

KRIVULJNI INTEGRALI

Krivuljni integral 1. vrste

Krivuljnim inetgralom prve vrste (ne ovisi o smjeru puta integracije), neprekidne funkcije $f(x,y)$, po krivulji C nazivamo limes odgovarajuće integralne sume

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta l_i = \int_C f(x,y)dl = \begin{cases} \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx; & \text{C} := [y=\varphi(x);\ a\le x\le b] \\ \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt; & \text{C} := [x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ \alpha\le t\le\beta] \end{cases}$$

gdje su Δl_i elementi luka krivulje C, $(x_i,y_i)\in\Delta l_i$, a dl diferencijal luka.

Krivuljni integral 2. vrste

Krivuljnim inetgralom druge vrste (ovisi o smjeru puta integracije ako podintegralni izraz nije totalni diferencijal neke jednoznačne funkcije), neprekidnih funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ po glatkoj krivulji C nazivamo limes odgovarajuće integralne sume.

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \begin{cases} \int_a^b [P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)]dx; & \text{C} := [y=\varphi(x); a\le x\le b] \\ \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(x)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(x)]dt\,; & \text{C} := [x=\varphi(t); y=\psi(t); \alpha\le t\le\beta] \end{cases}$$

Krivuljni integrali 1. i 2. vrste u prostoru

Krivuljni integrali funkcije $f(x,y,z)$ po prostronoj krivulji C računaju se po analognim relacijama.

PLOŠNI INTEGRALI

Plošni integral 1. vrste

Plošnim inetgralom prve vrste (ne ovisi o izboru strane plohe S), neprekidne funkcije $f(x,y,z)$, po glatkoj plohi S nazivamo limes odgovarajuće integralne sume

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i = \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_{XY}} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi'^2_x(x,y)+\varphi'^2_y(x,y)}\,dxdy$$

gdje su ΔS_i površine i-tih elemenata plohe S, točka $(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S_i$, a S_{xy} jednoznačna projekcija glatke plohe S $[z=\varphi(x,y)]$ na ravninu xOy (svaki pravac paralelan s osi Oz siječe plohu S samo u jednoj točki).

Plošni integral 2. vrste

Plošnim inetgralom druge vrste (ovisi o izboru strane plohe S jer pri prijelazu na drugu stranu plohe mijenja predznak), neprekidnih funkcija $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$, po plohi S, čija normala ima smjer $\hat{n} = \cos\alpha\,\hat{\imath}+\cos\beta\,\hat{\jmath}+\cos\gamma\,\hat{k}$, nazivamo limes odgovarajuće integralne sume.

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy = \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

Ako je ploha S zadana implicitno sa $\Phi(x,y,z)=0$, onda kosinus smjera normale te plohe određujemo

$$\hat{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} = \cos\alpha\,\hat{\imath}+\cos\beta\,\hat{\jmath}+\cos\gamma\,\hat{k}$$

Formula Ostrogradskog - Gaussa

Ako je S zatvorena glatka ploha, koja omeđuje konačno područje V, a $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ funkcije koje su, a i njihove prve parcijalne derivacije, neprekidne u zatvorenom području V+S,

$$\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

VEKTORSKI INTEGRALI

Rješavamo ih svođenjem na skalarne integrale rastavljajući ih na komponente ili množeći skalarno vektore.

Krivuljni integrali

$\int_C \Phi d\vec{r}$	$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\int_C \vec{F} \times d\vec{r}$	Diferencijalni vektor pomaka $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$

Plošni integrali

$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$	Element površine $\vec{S}$ $d\vec{S} = \hat{n}dS \xRightarrow{S:=\Phi(x,y,z)=0} d\vec{S} = \frac{\nabla\Phi}{\lvert\nabla\Phi\rvert} dS$	Za zatvorenu ploha, uzimamo pozitivan smjer prema vani. Za otvorenu plohu, pozitivni smjer pokazuje palac desne ako zavijemo prste desne ruke u smjeru obilaska ruba.

Volumni integrali

$$\iiint_V \vec{F} \cdot dV = \hat{\imath} \iiint_V F_x \cdot dV + \hat{\jmath} \iiint_V F_y \cdot dV + \hat{k} \iiint_V F_z \cdot dV$$

Element volumena
dV

Gaussov teorem (o divergenciji)

Ako površina S zatvara volumen V, tada vrijedi

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\vec{F} \cdot dV$$

Stokesov teorem (o rotaciji)

Ako krivulja C zatvara površinu S, tada vrijedi

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Greenov teorem

Ako površina S zatvara volumen V, tada vrijedi: $\oiint_S (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi)d\vec{S} = \iiint_V (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi)dV$

PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA

Duljina krivulje	Masa krivulje	Koordinate težišta krivulje	Moment inercije krivulje s obzirom na x-os
$L = \int_C dl$	$M = \int_C \mu dl$	$x_{iCM} = \frac{1}{M}\int_C x_i \mu dl$	$I_x = \int_C r^2 dm = \int_C (y^2 + z^2)\mu dl$
Površina lika	**Masa lika**	**Koordinate težišta lika**	**Moment inercije lika s obzirom na x-os**
$S = \int_S dS$	$M = \int_S \sigma dS$	$x_{iCM} = \frac{1}{M}\int_S x_i \sigma dS$	$I_x = \int_S r^2 dm = \int_S (y^2 + z^2)\sigma dS$
Volumen tijela	**Masa tijela**	**Koordinate težišta tijela**	**Moment inercije tijela s obzirom na x-os**
$V = \int_V dV$	$M = \int_V \rho dV$	$x_{iCM} = \frac{1}{M}\int_V x_i \rho dV$	$I_x = \int_V r^2 dm = \int_V (y^2 + z^2)\rho dV$

Volumen i oplošje rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje y= $f(x)$; $a \leq x \leq b$ oko x-osi

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b y^2\, dx \qquad O = \int_a^b dO = 2\pi \int_a^b \lvert y\rvert \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Cirkulacija vektorskog polja	Tok vektorskog polja	Rad sile duž krivulje C
$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$	$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

ZAKRIVLJENI KOORDINATENI SUSTAVI

Koordinate[5]	Jacobijan	Transformacija koordinata	Invertibilna transformacija
(q_1, q_2, q_3)	$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$	$x = x(q_1, q_2, q_3)$ $y = y(q_1, q_2, q_3)$ $z = z(q_1, q_2, q_3)$	$J \neq 0 \Longrightarrow \begin{matrix} q_1 = q_1(x,y,z) \\ q_2 = q_2(x,y,z) \\ q_3 = q_3(x,y,z) \end{matrix}$
Vektor položaja	**Diferencijalni vektro pomaka**	**Element kvadrata udaljenosti**	**Metrički tenzor**
$\vec{r} = \sum q_i \cdot \hat{q}_i$	$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i$	$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \cdot \mathrm{d}q_i \cdot \mathrm{d}q_j$	$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j}$
Ortogonalni koordinatni sustavi[6]			
$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij}$	$g_{ij} = 0\,, i \neq j$	$g_{ij} = h_i^2$	$ds^2 = \sum (h_k \cdot \mathrm{d}q_k)^2$

ORTOGONALNI KOORDINATNI SUSTAVI

Lameovi koeficijenti	Tangencijalni vektor	Diferencijalni vektor udaljenosti	Jedinični vektori
$h_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} = \left\lvert \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\rvert$	$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial q_i} = h_i \hat{q}_i$	$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{q}_i$	$\hat{q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{h_i}$
Element luka	**Element volumena**	**Element duljine luka**	**Element površine**
$d\vec{s_i} = h_i dq_i \hat{q}_i$	$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$	$ds^2 = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum h_i^2 \cdot \mathrm{d}q_i^2$	$d\sigma_i = h_j h_k dq_j dq_k$

Gradijent

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \hat{q}_i$$

Divergencija

$$\nabla \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i(j,k)} \frac{\partial}{\partial q_i} (h_j h_k F_i)$$

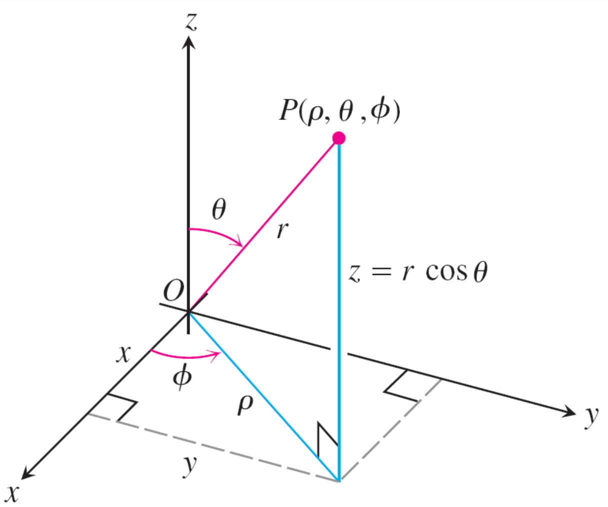
Laplasijan

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i(j,k)} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{h_j h_k}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

Rotacija

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_2 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

Koordinatni sustav



Kartezijev koordinatni sustav (x, y, z)

x, y, z	$\in \mathbb{R}$	$h_1 = h_2 = h_3 = 1$

Sferni koordinatni sustav (r, ϑ, φ)

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\in [0, +\infty\rangle$	$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$	$h_1 = 1$
$\vartheta = \mathrm{Arccos}(z/r)$	$\in [0, \pi\rangle$	$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$	$h_2 = r$
$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$	$\in [0, 2\pi\rangle$	$z = r \cos\vartheta$	$h_3 = r \sin\vartheta$

Cilindrični koordinatni sustav (ρ, φ, z)

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\in [0, +\infty\rangle$	$x = \rho \cos\varphi$	$h_1 = 1$
$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$	$\in [0, 2\pi\rangle$	$y = \rho \sin\varphi$	$h_2 = \rho$
$z = z$	$\in \mathbb{R}$	$z = z$	$h_3 = 1$

Polarni koordinatni sustav (ρ, φ)

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\in [0, +\infty\rangle$	$x = \rho \cos\varphi$
$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$	$\in [0, 2\pi\rangle$	$y = \rho \sin\varphi$

---

[5] Svaka točka (x, y, z) definirana je presjekom triju ravnina (x, y, z=konst) u Cartesijevom koordinatnom sustavu. Analogno možemo odrediti točku (q_1, q_2, q_3) u zakrivljenom koordinatnom sustavu definiranom familijom ploha $q_i(x, y, z) = konst$.

[6] Definirani međusobno okomitim plohama.

ORTOGONALNI KOORDINATNI SUSTAVI

Vektori u cilindričnom koordinatnom sustavu $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\varphi\,\hat{\jmath}$	$\hat{\imath} = \cos\varphi\,\hat{\rho} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}$	$\hat{\jmath} = \sin\varphi\,\hat{\rho} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
$\hat{k} = \hat{k}$	$\hat{k} = \hat{k}$

Vektori u sfernom koordinatnom sustavu $\vec{r} = r\hat{r}$

$\hat{r} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{\jmath} + \cos\vartheta\,\hat{k}$	$\hat{\imath} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{\vartheta} - \sin\vartheta\,\hat{\varphi}$
$\hat{\vartheta} = \cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{\jmath} - \sin\vartheta\,\hat{k}$	$\hat{\jmath} = \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{\vartheta} + \cos\vartheta\,\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}$	$\hat{k} = \cos\vartheta\,\hat{r} - \sin\vartheta\,\hat{\vartheta}$

Jacobijan (odnos Kartezijevih koordinata (x, y, z) i zakrivljenih koordinata (q_1, q_2, q_3))

$$J_{3D} = \frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)}$$

$$J_{2D} = \frac{D(x,y)}{D(q_1,q_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix}$$

Kartezijev koordinatni sustav:	$J = 1$
Sferni koordinatni sustav:	$J = r^2 \sin\vartheta$
Cilindrični koordinatni sustav:	$J = \rho$
Polarni koordinatni sustav:	$J = \rho$

Element volumena	Element površine	Element sferne površine u sfernim koordinatama
$dV = \lvert J\rvert dq_1 dq_2 dq_3$	$dS_i = \lvert J\rvert dq_j dq_k$	$d\vec{S} = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \hat{r}$

TENZORI

Tenzor je matematička ili fizikalna veličina invarijantna na translacije, a ima N^n komponenti gdje je N dimenzija prostora te n red tenzora. Skalar je tenzor nultog stupnja, a vektor je tenzor prvog stupnja. **Rang** (stupanj) tenzora možemo odredit promatrajući njegovo ponašanje pri rotaciji u koordinatnom sustavu. Prema **Einsteinovoj konvenciji za sumiranje** ako se u izrazu indeks pojavljuje dvaput, onda se izraz sumira po svim dopustivim vrijednostima tog indeksa, a ako jedanput, onda slična jednadžba vrijedi za sve njegove vrijednosti.

Rotacija koordinatnih osi[7]

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x' = Ax$$

$$a_{ij} = \cos\sphericalangle(x'_i, x_j)$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} x_i \;; j = 1,2,3 \xleftrightarrow[\text{konvenciji}]{\text{po } E.} x'_j = a_{ji} x_i$$

Vektori[8]	Skalari	Vektori u Kartezijevim koordinatama		
$V'_i = a_{ij} V_j$	$A' = A$	$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$	$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$	$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j$

Transformacija komponenti tenzora[9]	Kovarijantni vektor	Kontravarijantni vektor
$t'_{\alpha\beta\dots\mu} = \sum_{i=1}^{N} \cdots \sum_{m=1}^{N} a_{\alpha i} \cdots a_{\mu m} t_{ij\dots m}$	$V'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j$	$V'^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V^j$
Kovarijantni tenzor ranga 2	**Miješani tenzor ranga 2**	**Kontravarijantni tenzor ranga 2**
$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}$	$B'^i_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^k_l$	$A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$
Simetrični tenzor ranga 2	**Antisimetrični tenzor ranga 2**	**Prikaz tenzora ranga 2**
$S^{ij} = S^{ji}$	$A^{ij} = -A^{ji}$	$T^{ij} = S^{ij} + A^{ij}$

Kvocijentno pravilo $(B \neq 0)$[10]

$K^i A_i = B$	$K^i_j A^j = B^i$	$K^i_j A^j_k = B^i_k$	$K^{ijkl} A_{ij} = B^{kl}$	$K_{ij} A_k = B_{ijk}$

---

[7] Matrica rotacije A je ortogonalna te vrijedi $A^{-1} = A^{\tau}$.

[8] N veličina V_j komponente su N-dimenzionalnog vektora $\vec{V}$ akko se komponente transformiraju danim pravilom pri rotaciji.

[9] Ako se članovi $t_{ij\dots m}$ s n indeksa pri bilo kojem prijelazu iz sustava S u S' transformiraju po danom pravilu onda se T zove tenzor n-tog stupnja (ranga), a članovi $t_{ij\dots m}$ s uređenim indeksima komponente su tenzora T.

[10] Ako relacije vrijede u svim rotiranim Cartesijevim sustavima, K je tenzor ranga koji je naznačen ukupnim brojem indeksa.

TENZORI

Elementatrne algebarske operacije

Množenje tenzora brojem te zbrajanje ili oduzimanje tenzora istog stupnja vrši se po komponentama analogno operacijama s vektorima i matricama.

Kontrakcija[11]	Direktni produkt		
$B'^i_j \to B'^i_i = B^k_k$	$B^i_j B^{kl} = C^{ikl}_j$	$a'_i b'^j = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} b^l$	$C'^{ikl}_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_n}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_k}{\partial x_p}\frac{\partial x'_l}{\partial x_q} C^{mpq}_n$

Transformacija glavnih osi

Za svaki **simetrični tenzor T** postoji ortogonalna transformacija D, kojom se T transformira u dijagonalni oblik

$$\boldsymbol{T}' = \begin{bmatrix} t'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t'_{33} \end{bmatrix}$$

Elementi t'_{ii} zovu se **svojstvene vrijednosti tenzora T**, a jednake su korijenima λ_i jednadžbe

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Vektori stupci $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$matrice transformacije D zovu se **svojstveni vektori** i redom pripadaju svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2, λ_3 jer zadovoljavaju jednadžbu $\boldsymbol{T}\vec{d}_i = \lambda_i \vec{d}_i$. Smjerovi tih vektora zovu se **glavni smjerovi**, a transformacija koja **T** prevodi u dijagonalni oblik zove se **transformacija glavnih osi**.

INVARIJANTNI TENZORI

Kartezijev je tenzor invarijantan ako su mu sve komponente u svim koordinatnim sustavima nepromijenjene.

Delta tenzor (tenzor stupnja 2)	Epsilon tenzor[12] (tenzor stupnja 3)
$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$	$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 \text{, ako su i, j, k cikli\v{c}ki} \\ -1 \text{, ako su i, j, k acikli\v{c}ki} \\ 0 \text{, ina\v{c}e} \end{cases}$

PRIMJERI TENZORA 2. STUPNJA U FIZICI

Tenzor napetosti

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ako u točki P elastičnog tijela odaberemo malu plohu čiji smjer normale gleda u pravcu x_1 osi nekog pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava, tada sila po jedinici površine te plohe predstavlja vektor čije su komponente σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}.

Moment tromosti

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Komponente tenzora tromosti momenti su tromosti I_{ii} s obzirom na koordinatene osi, a $I_{i\neq k}$ momenti devijacija obzirom na koordinatne osi.

[11] Ako u tenzoru stupnja $n \geq 2$ obavimo sumiranje po dva jednaka indeksa, dobit ćemo tenzor stupnja $m-2$. Npr., tenzor drugog stupnja **C**, s članovima $c_{ij} = a_i b_j$, koji dobijemo kao produkt dva vektora $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, snižavanjem preko indeksa i i j postaje skalar $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$, odnosno tenzor stupnja 0, tj. skalarni produkt vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

[12] Mješoviti produkt jediničnih vektora u smjerovima koordinatnih osi pravokutnog koordinatnog sustava $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, $\vec{e}_k$.